

Produit de Moyal stochastique sur l'espace de Wiener

Giuseppe Dito & Rémi Léandre

Institut de Mathématiques de Bourgogne
CNRS UMR 5584
Université de Bourgogne
B.P. 47870
21078 Dijon CEDEX, France

e-mail : `giuseppe.dito@u-bourgogne.fr`, `remi.leandre@u-bourgogne.fr`

Abstract

We propose a stochastic extension of deformation quantization on a Hilbert space. The Moyal product is defined in this context on the space of functionals belonging to all of the Sobolev spaces of the Malliavin calculus.

Résumé

Nous proposons une version stochastique de la quantification par déformation sur un espace de Hilbert. Dans ce cadre, le produit de Moyal est défini sur l'espace des fonctionnelles appartenant à tous les espaces de Sobolev du Calcul de Malliavin.

1 Introduction

Le premier de cette note auteur a récemment étudié la théorie de la quantification par déformation sur un espace de Hilbert [2] qui est une extension en dimension infinie de [1] (Voir [3] pour un article de revue récent). Les formules obtenues sont très analogues à celles de l'analyse de Wiener sur un espace de Wiener abstrait $H \subset W$ [4], [7], [9], [10]. On remarque néanmoins que les spécificités du Calcul de Malliavin par rapport aux travaux antérieurs (Voir les travaux de Fomin, Albeverio, Elworthy, Hida, Berezanskii) sont les suivantes :

- a) il considère l'intersection de tous les espaces L^p sur l'espace de Wiener au lieu de considérer uniquement l'espace de Hilbert L^2 , si bien que l'ensemble des fonctions test du Calcul de Malliavin constitue une **algèbre** grâce à l'inégalité de Hölder ;
- b) il effectue la complétion des opérations différentielles connues en ce temps sur l'espace de Wiener, si bien qu'une fonctionnelle appartenant à tous les es-

paces de Sobolev du Calcul de Malliavin n'est en général que presque sûrement définie, puisqu'il n'y a pas de théorème d'injection de Sobolev en dimension infinie.

Par rapport au travail [2], nous considérons l'algèbre des fonctionnelles test au sens de Malliavin. Les formules de [2] restent valides, mais seulement presque sûrement, et avec des conditions naturelles d'intégrabilité.

Comme l'a remarqué Meyer [8], on peut se ramener au cas de l'étude de $L^2([0, 1])$ et de l'espace de Wiener usuel.

2 Brefs rappels sur le calcul de Malliavin

Soit $H \subset W$ un espace de Wiener abstrait [9]. Soit F une fonctionnelle appartenant à tous les espaces de Sobolev du Calcul de Malliavin. $\nabla^r F$ réalise un élément aléatoire de $H^{\otimes r}$, \otimes désignant le produit tensoriel hilbertien symétrique, puisqu'on ne dérive que dans la direction de H . On pose

$$\|F\|_{r,p} = E[\|\nabla^r F\|^p]^{1/p}. \quad (1)$$

$W_{r,p}$ est l'espace des fonctionnelles telles que $\|F\|_{r,p} < \infty$. $W_{\infty-}$ est l'espace des fonctionnelles telles que $\|F\|_{r,p} < \infty$ pour tout r et tout p . C'est une **algèbre commutative**. De façon analogue, on peut définir des espaces de Sobolev de fonctionnelles à valeurs dans des espaces de Hilbert.

Dans le cas où $H = L^2([0, 1]) \subset C([0, 1])$ est l'espace de Wiener habituel (on assimile $h \in L^2([0, 1])$ à la fonction $s \mapsto \int_0^s h(u)du$). $\nabla^r F$ est un élément aléatoire $F(s_1, \dots, s_r)$. La fonctionnelle F appartient à $W_{r,p}$ si

$$E[(\int_{[0,1]^r} |\nabla^r F(s_1, \dots, s_r)|^2 ds_1 \dots ds_r)^{p/2}]^{1/p} < \infty. \quad (2)$$

3 Quantification par déformation d'un espace de Wiener abstrait

Soit $H \subset W$ un espace de Wiener abstrait. Au lieu de considérer comme dans [2] l'algèbre des fonctions C^∞ au sens de Fréchet sur H , on prend $W_{\infty-}$ comme algèbre de fonctions définies sur W .

Définition 3.1 ($W_{\infty-}, \{\cdot, \cdot\}$) est appelé un espace de Wiener de Poisson si les conditions suivantes sont réalisées :

- i) il existe une application bilinéaire aléatoire P de $H \times H$ à valeurs dans \mathbb{R} appartenant à tous les espaces de Sobolev sur W ;
- ii) si on pose pour F et G appartenant à tous les espaces de Sobolev du Calcul de Malliavin :

$$\{F, G\} = P(\nabla F, \nabla G), \quad (3)$$

alors $\{\cdot, \cdot\}$ est un crochet de Poisson.

Un crochet de Poisson sur l'espace de Wiener est un cas particulier d'opérateur r -différentiel sur l'espace de Wiener défini par :

Définition 3.2 *Un opérateur r -différentiel A sur $W_{\infty-}$ est défini par les données suivantes :*

- i) une famille finie a^{n_1, \dots, n_r} d'applications de $H^{\otimes n_1} \times \dots \times H^{\otimes n_r}$ à valeurs dans \mathbb{R} appartenant à tous les espaces de Sobolev du Calcul de Malliavin ;*
- ii) pour $F_1, \dots, F_r \in W_{\infty-}$, on a :*

$$A(F_1, \dots, F_r) = \sum a^{n_1, \dots, n_r} (\nabla^{n_1} F_1, \dots, \nabla^{n_r} F_r). \quad (4)$$

Il résulte de l'inégalité de Hölder que A applique continuellement $W_{\infty-}^r$ sur $W_{\infty-}$.

Nous pouvons maintenant donner la définition d'une quantification par déformation d'un espace de Wiener abstrait.

Définition 3.3 *Soit $(W_{\infty-}, \{\cdot, \cdot\})$ un espace de Wiener de Poisson. On considère l'espace $W_{\infty-}[[\hbar]]$ des séries formelles $\sum \hbar^n F_n$ où F_n appartient à $W_{\infty-}$. Un star-produit \star_{\hbar} est la donnée d'une application $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -bilinéaire de $W_{\infty-}[[\hbar]] \times W_{\infty-}[[\hbar]]$ dans $W_{\infty-}[[\hbar]]$ telle que :*

- i) $F \star_{\hbar} G = \sum \hbar^r C_r(F, G)$;*
- ii) $C_0(F, G) = FG$;*
- iii) $C_1(F, G) - C_1(G, F) = 2\{F, G\}$;*
- iv) C_r est un opérateur bidifférentiel au sens de la définition 3.2 ;*
- v) $F \star_{\hbar} (G \star_{\hbar} H) = (F \star_{\hbar} G) \star_{\hbar} H$.*

La partie suivante est consacrée à l'étude d'un exemple.

4 Le produit de Moyal stochastique

Nous considérons $H = L^2([0, 1]) \oplus L^2([0, 1])$ et $W = C([0, 1]) \oplus C([0, 1])$. Le symbole w^1 désigne un élément du premier espace de Wiener et w^2 un élément du deuxième (les deux espaces de Wiener dans W sont indépendants). Si F et G sont deux fonctionnelles appartenant à $W_{\infty-}$ pour l'espace de Wiener **total**, on introduit :

$$\{F, G\}(w^1, w^2) = \int_0^1 \nabla_1 F(s) \nabla_2 G(s) ds - \int_0^1 \nabla_1 G(s) \nabla_2 F(s) ds. \quad (5)$$

Dans la première intégrale, nous dérivons F par rapport au premier espace et G par rapport au second espace de Hilbert, et réciproquement dans la seconde intégrale.

Nous avons clairement :

Théorème 4.1 *$W_{\infty-}$ muni du crochet (5) est un espace de Wiener de Poisson.*

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r$ des entiers égaux à 1 ou 2. Nous posons (Voir [2] (6)) :

$$\begin{aligned} &< \nabla_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}^r F, \nabla_{\beta_1, \dots, \beta_r}^r G > = \\ &\int_{[0, 1]^r} ds_1 \cdots ds_r \nabla_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}^r F(s_1, \dots, s_r) \nabla_{\beta_1, \dots, \beta_r}^r G(s_1, \dots, s_r). \end{aligned} \quad (6)$$

Cela définit clairement un opérateur bidifférentiel au sens de la définition 3.2.

Soit Λ la matrice symplectique 2×2 définie par $\Lambda^{1,2} = 1$. Suivant [2] (7), nous posons :

$$C_r(F, G) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r} \Lambda^{\alpha_1, \beta_1} \dots \Lambda^{\alpha_r, \beta_r} < \nabla_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}^r F, \nabla_{\beta_1, \dots, \beta_r}^r G >. \quad (7)$$

Comme dans (7) la somme est finie, C_r est un opérateur bidifférentiel sur l'espace de Wiener total.

Définition 4.2 *Le produit de Moyal stochastique est défini par :*

$$F *_h G = FG + \sum_{r \geq 1} \frac{h^r}{r!} C_r(F, G). \quad (8)$$

En procédant comme dans [2], Théoreme 1, on montre :

Théorème 4.3 *Le produit de Moyal stochastique réalise une quantification par déformation de l'espace de Wiener de Poisson $(W_{\infty}, \{\cdot, \cdot\})$.*

5 L'espace de phase de l'espace de Wiener

On a procédé ci-dessus comme si W était l'espace de phase de l'espace de Wiener $C([0, 1])$ muni de sa forme symplectique canonique. Mais comme l'ont montré les travaux de Léandre [5, 6] il faut plutôt considérer comme espace de phase de l'espace de Wiener l'espace $C([0, 1]) \oplus L^2([0, 1])$ où on a assimilé $L^2([0, 1])$ à l'espace de Sobolev $H^{1,2}([0, 1])$ des applications f telles $\int_0^1 |d/ds f(s)|^2 ds < \infty$. Sur $L^2([0, 1])$ nous mettons la mesure Gaussienne avec espace auto-reproduisant $H^{1,2}$ des h tels que $\int_0^1 |d/ds h(s)|^2 ds = \|h\|_{1,2}^2 < \infty$. Si l'on prend la dérivée d'une fonctionnelle F dans la direction de $H_{1,2}$, nous assimilons son noyau aléatoire $\nabla_2 F(s)$ à $\int_0^s \nabla_2 F(t) dt$. En utilisant cette identification, nous pouvons donner une extension à ce cadre de la forme symplectique canonique sur l'espace de phase $W = C([0, 1]) \oplus L^2([0, 1])$ en utilisant la dérivation suivant $L^2([0, 1])$ pour $C([0, 1])$ et suivant $H^{1,2}$ pour $L^2([0, 1])$.

La formule (6) s'interprète facilement dans ce nouveau formalisme et permet d'obtenir un nouveau produit de Moyal stochastique.

Références

- [1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, Deformation theory and quantization, Ann. Phys. 111 (1978) 61–151.
- [2] G. Dito, Deformation quantization on a Hilbert space, Preprint : math.QA/0406583 (2004).
- [3] G. Dito, D. Sternheimer, Deformation quantization : genesis, developments and metamorphoses, in : G. Halbout (ed.), Deformation quantization, IRMA Lectures in Maths. Theor. Phys. Walter de Gruyter, 2002 pp. 9–54.

- [4] N. Ikeda, S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes, 2nd ed., North Holland, 1989.
- [5] Léandre R. : Stochastic gauge transform of the string bundle, J. Geom. Phys. 26 (1998) 1–25.
- [6] Léandre R. : Stochastic cohomology of the frame bundle of the loop space, J. Nonlinear. Math. Phys. 5 (1998) 17–31.
- [7] P. Malliavin, Stochastic analysis, Springer-Verlag, 1997.
- [8] P. A. Meyer, Quantum probability for probabilists, Lect. Notes Math. 1538, Springer-Verlag, 1993.
- [9] D. Nualart, Malliavin Calculus and related topics, Springer-Verlag, 1995.
- [10] A. S. Üstünel, An introduction to analysis on Wiener space, Lect. Notes Math. 1610, Springer-Verlag, 1995.